Álgebra A 62

Ingeniería

2015

Práctica 1

Conjuntos

Definiciones y propiedades

Conjuntos, pertenencia e inclusión

Un *conjunto* es una colección de objetos. A los objetos que forman un conjunto, se los llama *elementos* del conjunto. En un conjunto, no importa el orden de los elementos, ni se tienen en cuenta repeticiones de elementos.

Algunos conjuntos que se utilizan frecuentemente en matemática son los siguientes:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, el conjunto de los números naturales;
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, el conjunto de los números enteros;
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\}$, el conjunto de los números racionales (fracciones);
- $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales.

Se define el *conjunto vacío* como el conjunto que no tiene ningún elemento, y se lo representa con el símbolo $\emptyset$.
Si A es un conjunto y a es un elemento de A, se dice que a *pertenece* a A, y se escribe $a \in A$.
Si un objeto b no pertenece a un conjunto A, escribimos $b \notin A$.

Dos conjuntos A y B son *iguales* si tienen exactamente los mismos elementos. En este caso, se escribe $A = B$.

Dos formas de describir un conjunto son por *extensión* y por *comprensión*. Por ejemplo, el conjunto A que contiene a todos los números naturales del 1 al 4 se puede definir como sigue:

- (por *extensión*) enumerando todos sus elementos, escritos entre llaves: $A = \{1, 2, 3, 4\}$;
- (por *comprensión*) a través de una propiedad que verifican los elementos del conjunto y ningún otro: $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 4\}$.

Para definir un conjunto por comprensión, usualmente se necesita dar un conjunto *referencial*, también llamado conjunto *universal* y que se nota $\mathcal{U}$, de donde se eligen los elementos. En el ejemplo anterior, el conjunto referencial es $\mathcal{U} = \mathbb{N}$.

Se dice que un conjunto B *está incluido* en un conjunto A, o que B es un *subconjunto* de A, si cada elemento de B es un elemento de A. En este caso, se nota $B \subseteq A$. Si B no es un subconjunto de A, escribimos $B \nsubseteq A$.
Observamos que:

- $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq A$ para todo conjunto A;
- si A, B y C son conjuntos tales $C \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $C \subseteq A$;
- $A = B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Unión, intersección y complemento

Sean A y B dos conjuntos.

- La *unión* de A y B, que se nota $A \cup B$, es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto A o al conjunto B (o sea, los elementos que pertenecen a alguno de los dos conjuntos, incluyendo los que pertenecen a ambos); es decir, $A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$.
- La *intersección* de A y B, que se nota $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B; es decir, $A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$.
- La *diferencia* de conjuntos "A menos B", que se nota $A \setminus B$, es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B; es decir, $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$.

  Observamos que, en general, las diferencias $A \setminus B$ y $B \setminus A$ no son iguales.

Si A es un conjunto incluido en un conjunto universal $\mathcal{U}$, el *complemento* de A (en $\mathcal{U}$), que notaremos A^c, es el conjunto de todos los elementos de $\mathcal{U}$ que no pertenecen a A; es decir, $A^c = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$.

Práctica 2

Números Complejos

Definiciones y propiedades

El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos se define como

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi /\ a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

La representación $z = a + bi$ de un número complejo se llama la *forma binómica* de z, a se llama la *parte real* de z y escribimos $\mathrm{Re}(z) = a$, y b se llama la *parte imaginaria* de z y escribimos $\mathrm{Im}(z) = b$.
Dados $z, w \in \mathbb{C}$,

$$z = w \iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \text{ e } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w).$$

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$, definimos la suma y el producto de z y w en la forma

$$z + w = (a + c) + (b + d)i \qquad \text{(suma)}$$

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i \qquad \text{(producto)}$$

La suma y el producto son asociativos y conmutativos y, además, vale la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.
Notación: $a + (-b)i = a - bi$, $a + 0i = a$, $0 + bi = bi$.

Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, llamaremos *conjugado* de z al número complejo $\overline{z} = a - bi$ y *módulo* de z al número real no negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Se verifican:

a) $z\overline{z} = |z|^2$ *b*) si $z \neq 0$, $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Propiedades de la conjugación:

C1) $\overline{\overline{z}} = z$ C2) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ C3) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

C4) si $z \neq 0$, $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$ C5) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ C6) $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)\,i$

Propiedades del módulo:

M1) $z = 0 \iff |z| = 0$ M2) $|z| = |\overline{z}|$ M3) $|zw| = |z|\,|w|$

M4) $|z| = |-z|$ M5) si $z \neq 0$, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ M6) si $w \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$

Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, llamaremos *argumento* de z al único número real $\arg(z)$ que verifica

$$0 \leq \arg(z) < 2\pi, \qquad \cos(\arg(z)) = \frac{a}{|z|} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\arg(z)) = \frac{b}{|z|}.$$

La *forma polar o trigonométrica* de z es

$$z = |z|\,(\cos(\arg(z)) + i\ \operatorname{sen}(\arg(z)))$$

Se verifican:

- si $z = \rho\,(\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))$ con $\rho, \alpha \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, entonces $|z| = \rho$ y $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.
- si $z = \rho\,(\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))$ y $w = \tau\,(\cos(\beta) + i\operatorname{sen}(\beta))$, con $\rho, \alpha \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ y $\tau, \beta \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, entonces

$$z = w \iff \rho = \tau \quad \text{y} \quad \alpha = \beta + 2k\pi \ \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Si $z \in \mathbb{C}$, $z = |z|\,(\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))$, la *notación exponencial* de z es $z = |z|\,e^{i\alpha}$.

Teorema de De Moivre. Sean $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $w \neq 0$.
Si $z = |z|\,(\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))$ y $w = |w|\,(\cos(\beta) + i\operatorname{sen}(\beta))$, entonces

$$zw = |z|\,|w|\,(\cos(\alpha+\beta) + i\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta))$$

es decir,

$$|z|\,e^{i\alpha}\ |w|\,e^{i\beta} = |z|\,|w|\,e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Como consecuencia, se deduce que:

$$\begin{array}{rcl} z^{-1} &=& |z|^{-1}\,(\cos(-\alpha) + i\ \operatorname{sen}(-\alpha)) \\ \overline{z} &=& |z|\,(\cos(-\alpha) + i\ \operatorname{sen}(-\alpha)) \\ \dfrac{z}{w} &=& \dfrac{|z|}{|w|}(\cos(\alpha-\beta) + i\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta)) \\ z^n &=& |z|^n\,(\cos(n\alpha) + i\ \operatorname{sen}(n\alpha)) \end{array} \qquad \begin{array}{lrcl} \text{es decir,} & z^{-1} &=& |z|^{-1}\,e^{-i\alpha} \\ \text{es decir,} & \overline{z} &=& |z|\,e^{-i\alpha} \\ \text{es decir,} & \dfrac{z}{w} &=& \dfrac{|z|}{|w|}e^{i(\alpha-\beta)} \\ \text{es decir,} & z^n &=& |z|^n\,e^{i(n\alpha)} \end{array}$$

Si $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, una *raíz n-ésima* de w es un número $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^n = w$. Si z es una raíz n-ésima de w, entonces

$$z = |w|^{\frac{1}{n}} \left(\cos\!\left(\frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

para algún número entero k tal que $0 \leq k \leq n-1$.

Práctica 3

Polinomios

Definiciones y propiedades

En lo que sigue, $\mathbb{K}$ significa $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
Un *polinomio* con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una expresión de la forma

$$P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$$

con $n \in \mathbb{N}_0$ y $a_j \in \mathbb{K}$ para $j = 0, \ldots, n$.
Indicaremos con $\mathbb{K}[x]$ al conjunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ y consideramos en $\mathbb{K}[x]$ las operaciones de suma y producto usuales.

Dado $P \in \mathbb{K}[x]$ no nulo, $P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ con $a_n \neq 0$, decimos que a_n es el *coeficiente principal* de P y definimos el *grado* de P como $\operatorname{gr}(P) = n$. Por convención, el polinomio nulo no tiene grado.

Propiedades. Dados $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$ y $Q \neq 0$,

- $\operatorname{gr}(PQ) = \operatorname{gr}(P) + \operatorname{gr}(Q)$;
- si $P + Q \neq 0$, entonces $\operatorname{gr}(P + Q) \leq \text{máx}\{\operatorname{gr}(P), \operatorname{gr}(Q)\}$;
- si $\operatorname{gr}(P) \neq \operatorname{gr}(Q)$, entonces $\operatorname{gr}(P + Q) = \text{máx}\{\operatorname{gr}(P), \operatorname{gr}(Q)\}$.

Algoritmo de división. Dados $P, Q \in \mathbb{K}[x]$, $Q \neq 0$, existen únicos $S, R \in \mathbb{K}[x]$ tales que

$$P = QS + R \quad \text{y} \quad R = 0 \text{ o } \operatorname{gr}(R) < \operatorname{gr}(Q).$$

El polinomio R se llama el *resto* de la división de P por Q. Cuando este resto es el polinomio nulo (es decir, si $P = QS$), decimos que P es divisible por Q o que Q divide a P.

Dados $P \in \mathbb{K}[x]$, $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$, y $z \in \mathbb{K}$, llamaremos *especialización* de P en z al número $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_jz^j$ y diremos que z es *raíz* de P si $P(z) = 0$.

Teorema del resto. Sean $P \in \mathbb{K}[x]$ y $z \in \mathbb{K}$. Entonces el resto de la división de P por $x - z$ es igual a $P(z)$. En particular, z es raíz de P si y sólo si $x - z$ divide a P.

Si $P \in \mathbb{K}[x]$ y $z_1, z_2, \ldots, z_r$ son r raíces distintas de P, entonces

$$P = (x - z_1)(x - z_2) \ldots (x - z_r).Q$$

para algún $Q \in \mathbb{K}[x]$.
En consecuencia, si $P \in \mathbb{K}[x]$ tiene grado n, entonces P tiene a lo sumo n raíces en $\mathbb{K}$.

Teorema de Gauss. Sea $P \in \mathbb{Z}[x]$, $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, con $a_n \neq 0$ y $a_0 \neq 0$. Si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ es raíz de P (con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ sin factores primos en común), entonces p es un divisor de a_0 y q es un divisor de a_n.

Teorema fundamental del álgebra. Si $P \in \mathbb{C}[x]$ y $\operatorname{gr}(P) \geq 1$, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que z es raíz de P.

Propiedad. Si $P \in \mathbb{R}[x]$ y $z \in \mathbb{C}$, entonces z es raíz de P si y sólo si $\overline{z}$ es raíz de P.

Sea $P \in \mathbb{K}[x]$ y sea $k \in \mathbb{N}$. Diremos que $z \in \mathbb{K}$ es una raíz de P de *multiplicidad* k si existe $Q \in \mathbb{K}[x]$ con $Q(z) \neq 0$ tal que $P(x) = (x - z)^k Q(x)$.

Dado $P \in \mathbb{K}[x]$, $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, el *polinomio derivado* de P es $\partial P(x) = \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1} \in \mathbb{K}[x]$.

Propiedades. Dados $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ y $a \in \mathbb{K}$,

a) $\partial(P + Q) = \partial P + \partial Q$ *b)* $\partial(PQ) = (\partial P).Q + P.(\partial Q)$ *c)* $\partial(ax^0) = 0$

Escribimos $\partial^2 P = \partial(\partial P)$, $\partial^3 P = \partial(\partial^2 P) = \partial(\partial(\partial P))$, $\partial^m P = \partial(\partial^{m-1} P) = \partial(\partial(\ldots(\partial P)))$.

Propiedad. Si $P \in \mathbb{K}[x]$ y $z \in \mathbb{K}$, vale que z es una raíz de P de multiplicidad k si y sólo si

$$P(z) = 0,\ \partial P(z) = 0,\ \partial^2 P(z) = 0,\ \ldots, \partial^{k-1} P(z) = 0 \text{ y } \partial^k P(z) \neq 0.$$

Dados un polinomio $f \in \mathbb{R}[x]$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ una raíz de f, el *orden de contacto* entre la curva $y = f(x)$ y el eje x en el punto $(x_0, 0)$ es la multiplicidad de x_0 como raíz de f. Más generalmente, si $f, g \in \mathbb{R}[x]$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ es tal que $f(x_0) = g(x_0)$, el orden de contacto entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en el punto de abscisa x_0 es la multiplicidad de x_0 como raíz de $f - g$.

Polinomio interpolador de Lagrange. Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tales que $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$ y sean $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$. Existe un único polinomio $L \in \mathbb{K}[x]$, con $L = 0$ o $\operatorname{gr}(L) \leq n$, que satisface $L(a_i) = b_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. Este polinomio es

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(x) \text{ donde } L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (x - a_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (a_i - a_k)}$$

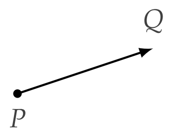
Práctica 4

Álgebra vectorial - Primera parte

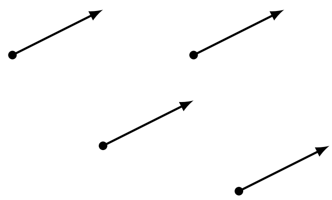
Definiciones y propiedades

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

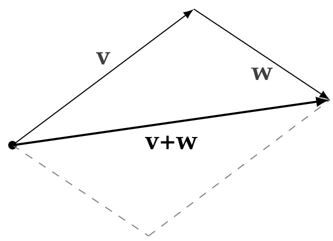
Una flecha que sirve para representar cantidades físicas (fuerzas, velocidades) es un *vector*. Para dar un vector necesitamos un *origen* (P) y un *extremo* (Q) que lo determinan totalmente, proporcionando su dirección, longitud y sentido.



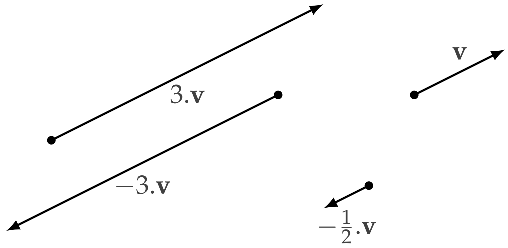
Vectores equivalentes son los que tienen igual dirección, longitud y sentido. Los siguientes vectores son todos equivalentes:



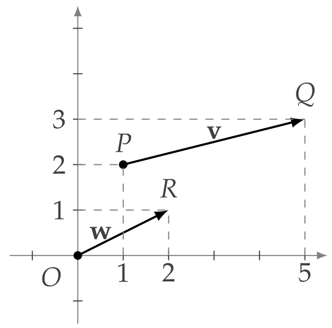
Los vectores se pueden sumar. La suma, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es equivalente a una de las diagonales del paralelogramo de lados $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$:



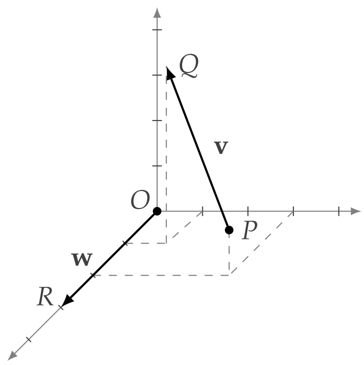
También se puede multiplicar un vector por un número (escalar). El resultado es un vector de igual dirección que el dado; el número afecta la longitud y el sentido del vector.



En el plano $\mathbb{R}^2$ los puntos están dados por pares de números reales (sus coordenadas) por lo que, para dar un vector, bastará dar dos pares de números reales que caractericen su origen y su extremo. En la figura que sigue, $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ está dado por $P = (1,2)$ y $Q = (5,3)$ y $\mathbf{w} = \overrightarrow{OR}$ está dado por $O = (0,0)$ y $R = (2,1)$.



Algo análogo se puede decir en el espacio de tres dimensiones $\mathbb{R}^3$; ahora, cada punto, en particular el origen y el extremo de un vector, estará dado por una terna de números reales. En la figura que sigue, $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ está dado por $P = (2,3,1)$ y $Q = (1,1,4)$ y $\mathbf{w} = \overrightarrow{OR}$ está dado por $O = (0,0,0)$ y $R = (3,0,0)$.



En adelante trabajaremos con vectores cuyo origen O tiene todas sus coordenadas iguales a 0 ($O = (0,0)$ en $\mathbb{R}^2$ y $O = (0,0,0)$ en $\mathbb{R}^3$), identificando entonces el punto P con la flecha $\overrightarrow{OP}$.

Dados $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ en $\mathbb{R}^2$, definimos

- la *suma* como $P + Q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2)$ y
- el *producto* por un escalar $c \in \mathbb{R}$ como $c.P = (cp_1, cp_2)$.

Análogamente, en $\mathbb{R}^3$, si $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$, se define

- la *suma* como $P + Q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3)$ y
- el *producto* por un escalar $c \in \mathbb{R}$ como $c.P = (cp_1, cp_2, cp_3)$.

Escribimos $P - Q = P + (-1).Q$ (es decir, resta coordenada a coordenada).

En este contexto vale:

a) $\overrightarrow{PQ}$ es *equivalente* a $\overrightarrow{RS}$ si y sólo si $S - R = Q - P$. En particular, $\overrightarrow{PQ}$ es *equivalente* a $\overrightarrow{OR}$ si y sólo si $R = Q - P$.

b) $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ son *paralelos* o tienen igual dirección si existe $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, tal que $Q - P = k.(S - R)$.
Si $k > 0$, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen igual sentido; si $k < 0$, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen sentidos opuestos.

Vectores en $\mathbb{R}^n$

Generalizando lo anterior, llamaremos *punto* o *vector* en el espacio $\mathbb{R}^n$ a una n-upla $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, donde $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son números reales. Estos números son las *coordenadas* de X.

Si $P = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$ decimos que

$$P = Q \quad \text{si y sólo si} \quad p_1 = q_1\,,\ p_2 = q_2\,,\ p_3 = q_3\,,\ \ldots\,,\ p_n = q_n\,.$$

Definimos

- la *suma* como $P + Q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3, \ldots, p_n + q_n)$ y
- el *producto* por un escalar $c \in \mathbb{R}$ como $c.P = (cp_1, cp_2, cp_3, \ldots, cp_n)$.

El vector con todas sus coordenadas cero se notará $O = (0, 0, 0, \ldots, 0)$

Propiedades. Las siguientes propiedades para la suma de vectores y el producto de un escalar por un vector valen en cualquier espacio de vectores $\mathbb{R}^n$:

1) $P + (Q + R) = (P + Q) + R$

2) $P + Q = Q + P$

3) Si $c \in \mathbb{R}$, $c.(P + Q) = c.P + c.Q$

4) Si $c_1 \in \mathbb{R}$ y $c_2 \in \mathbb{R}$, $(c_1 + c_2).P = c_1.P + c_2.P$ y $(c_1 c_2).P = c_1.(c_2.P)$

5) $O + P = P$

6) $1.P = P$

7) $P + (-1).P = O$ Notación: $-P = (-1).P$

8) $0.A = O$

Producto interno o escalar

Dados dos vectores $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ en $\mathbb{R}^2$, se define el *producto interno (o escalar)* de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ como el número real $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$.
En $\mathbb{R}^3$, si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, el *producto interno (o escalar)* de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es el número real $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$.

Propiedades.

PE1. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$

PE2. $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{w} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{v}$

PE3. Si $k \in \mathbb{R}$, $(k.\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = k.(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (k.\mathbf{w})$

PE4. Si $\mathbf{v} = O$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$. Si $\mathbf{v} \neq O$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$.

Diremos que dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son *ortogonales* o *perpendiculares* si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Producto vectorial

Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ son vectores de $\mathbb{R}^3$, el *producto vectorial* $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ se define como el vector $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$. Notar que el producto vectorial de dos vectores en $\mathbb{R}^3$ es un vector en $\mathbb{R}^3$.

Propiedades.

PV1. $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$

PV2. $\mathbf{v} \times (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{z})$

$(\mathbf{w} + \mathbf{z}) \times \mathbf{v} = (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{z} \times \mathbf{v})$

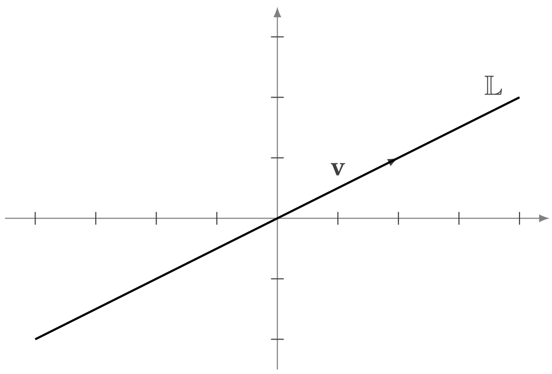
PV3. Si $k \in \mathbb{R}$, $(k.\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = k.(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times (k.\mathbf{w})$

PV4. $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = O$

PV5. $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$

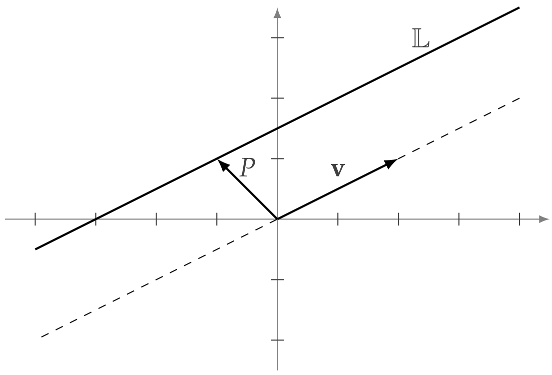
Rectas

Dado en el plano $\mathbb{R}^2$ un vector $\mathbf{v}$, el conjunto de todos sus múltiplos es la recta $\mathbb{L}$ que tiene por dirección a $\mathbf{v}$ y que pasa por O.



Una *ecuación paramétrica* de la recta $\mathbb{L}$ es $X = \lambda.\mathbf{v}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y $X = (x, y)$, la ecuación se escribe $(x, y) = \lambda.(v_1, v_2)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
La recta $\mathbb{L}$ resulta ser el conjunto de soluciones de la ecuación $v_2x - v_1y = 0$, y esta ecuación es una *ecuación implícita* de $\mathbb{L}$.

Ahora bien, dados en el plano $\mathbb{R}^2$ un vector $\mathbf{v}$ y un punto P, una *ecuación paramétrica* de la recta $\mathbb{L}$ que pasa por P en la dirección de $\mathbf{v}$ es $X = \lambda.\mathbf{v} + P$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. El vector $\mathbf{v}$ se dice un *vector dirección* para $\mathbb{L}$.



Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $P = (p_1, p_2)$ y $X = (x, y)$, la ecuación paramétrica se escribe $(x, y) = \lambda.(v_1, v_2) + (p_1, p_2)$.
Si $c = v_2p_1 - v_1p_2$, la recta $\mathbb{L}$ es el conjunto de soluciones de la ecuación $v_2x - v_1y = c$, y esta ecuación es una *ecuación implícita* para $\mathbb{L}$.
Para describir una recta en $\mathbb{R}^2$, podemos utilizar una ecuación paramétrica del tipo $X = \lambda.\mathbf{v} + P$ o utilizar una ecuación implícita del tipo $ax + by = c$.

De manera similar, dados en $\mathbb{R}^3$ un vector $\mathbf{v}$ y un punto P una *ecuación paramétrica* de la recta $\mathbb{L}$ que pasa por P en la dirección de $\mathbf{v}$ es $X = \lambda.\mathbf{v} + P$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. El vector $\mathbf{v}$ se dice un *vector dirección* para $\mathbb{L}$.
Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $X = (x, y, z)$, tenemos que $(x, y, z) = \lambda.(v_1, v_2, v_3) + (p_1, p_2, p_3)$.

Planos en $\mathbb{R}^3$

Dado un vector $\mathbf{N}$ y un punto Q de $\mathbb{R}^3$, la *ecuación* del plano Π que pasa por Q y es perpendicular a $\mathbf{N}$ es

$$\Pi : \quad (X - Q) \cdot \mathbf{N} = 0.$$

El plano Π es el conjunto de todos los puntos X tales que $X - Q$ es perpendicular a $\mathbf{N}$. Diremos que $\mathbf{N}$ es un *vector normal* al plano. Si $X = (x, y, z)$ y $\mathbf{N} = (a, b, c)$, la ecuación resulta:

$$\Pi : \quad ax + by + cz = d \quad \text{donde} \quad d = Q \cdot \mathbf{N}.$$

Esta ecuación es una *ecuación implícita* del plano Π.
Si los puntos P, Q y R no están alineados y pertenecen al plano Π, resulta que Π es el conjunto de todos los X que cumplen

$$X = \alpha.(P - R) + \beta.(Q - R) + R \quad \text{para } \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Ésta es una *ecuación paramétrica* del plano Π. Un vector normal $\mathbf{N}$ a Π es cualquier vector no nulo perpendicular simultáneamente a $P - R$ y a $Q - R$. Por ejemplo, puede tomarse $\mathbf{N} = (P - R) \times (Q - R)$.

Una recta $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}^3$ puede considerarse como intersección de dos planos que la contienen. Por lo tanto, para dar ecuaciones implícitas para una recta se necesitan por lo menos dos ecuaciones.
Una forma de obtener ecuaciones implícitas a partir de una ecuación paramétrica para $\mathbb{L}$ del tipo $(x, y, z) = \lambda.(v_1, v_2, v_3) + (p_1, p_2, p_3)$ es buscar dos vectores con distintas direcciones (a, b, c) y (d, e, f) perpendiculares a (v_1, v_2, v_3) simultáneamente. Entonces la recta $\mathbb{L}$ estará dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} ax + by + cz = ap_1 + bp_2 + cp_3 \\ dx + ey + fz = dp_1 + ep_2 + fp_3. \end{cases}$$

Posiciones relativas

Dos rectas en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ se dicen

- *coincidentes* si son la misma recta,
- *transversales* si se cortan en un punto,
- *paralelas* si sus direcciones coinciden.

Dos rectas en $\mathbb{R}^3$ pueden no cortarse ni ser paralelas; en este caso, se dicen *alabeadas*.

Si las direcciones de dos rectas son perpendiculares, decimos que las rectas son *perpendiculares* u *ortogonales*.

Dos planos en $\mathbb{R}^3$ se dicen

- *coincidentes* si son el mismo plano,
- *transversales* si se cortan en una recta,
- *paralelos* si sus vectores normales lo son.

Una recta y un plano en $\mathbb{R}^3$ son

- *paralelos* si la dirección de la recta es perpendicular al vector normal al plano,
- *ortogonales* si la dirección de la recta es paralela al vector normal al plano.

Práctica 5

Álgebra vectorial - Segunda parte

Definiciones y propiedades

Norma, ángulo y producto mixto

La *norma* de un vector $\mathbf{v}$, que notaremos $\|\mathbf{v}\|$, es la longitud del vector.
Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ es un vector en $\mathbb{R}^2$, su norma es la distancia entre el punto (v_1, v_2) y el origen de coordenadas $O = (0, 0)$. Por el teorema de Pitágoras, resulta ser $\|(v_1, v_2)\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.
De manera análoga, la norma de $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbb{R}^3$ es $\|(v_1, v_2, v_3)\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.
La norma puede expresarse en función del producto escalar: $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.
A partir de esta definición, se puede calcular la *distancia entre dos puntos* P y Q (de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$): es la norma de la diferencia $P - Q$; en símbolos, $d(P, Q) = \|P - Q\|$.

Propiedades. Si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son dos vectores, entonces

- $\|k\,\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ (*desigualdad triangular o de Minkowski*).
- $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \,.\, \|\mathbf{w}\|$ (*desigualdad de Cauchy-Schwarz*).

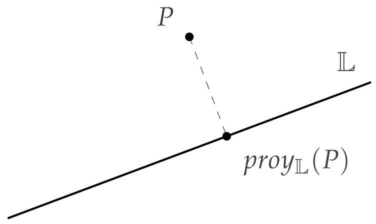
El *ángulo* entre dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es el menor de los dos ángulos determinados por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Es el único ángulo θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ que verifica $\cos(\theta) = \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \,.\, \|\mathbf{w}\|}$.

Si los puntos O, P y Q en $\mathbb{R}^3$ no están alineados, los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ determinan un paralelogramo. El área de este paralelogramo es la norma del producto vectorial $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$.

Dados tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^3$, su *producto mixto* es el número real que se obtiene al hacer el producto vectorial de los dos primeros y al resultado multiplicarlo escalarmente por el último vector; en símbolos, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.
Si los puntos O, P, Q y R en $\mathbb{R}^3$ no son coplanares, los vectores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$ determinan un paralelepípedo. El volumen de este paralelepípedo es el módulo del producto mixto entre los vectores. Este producto mixto es cero si y solo si O, P, Q y R son coplanares.

Proyección ortogonal y distancia

Dados un punto P y una recta $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}^2$, la *proyección ortogonal de P sobre $\mathbb{L}$* es el punto $proy_{\mathbb{L}}(P)$ que resulta de intersecar a la recta $\mathbb{L}$ con la recta perpendicular que pasa por P.



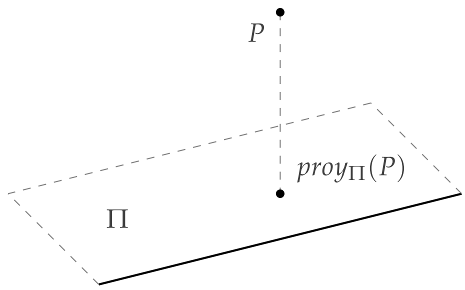
Si $\mathbb{L} : ax + by = c$, la proyección ortogonal de P se puede calcular como

$$proy_{\mathbb{L}}(P) = \frac{c - P \cdot (a, b)}{\|(a, b)\|^2}\,(a, b) + P$$

y, si $\mathbb{L} : X = \lambda.\mathbf{v} + Q \ \ (\lambda \in \mathbb{R})$, entonces

$$proy_{\mathbb{L}}(P) = \frac{(P - Q) \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\,\mathbf{v} + Q.$$

Similarmente, dados un punto P y un plano Π en $\mathbb{R}^3$, la *proyección ortogonal de P sobre Π* es el punto $proy_{\Pi}(P)$ que resulta de intersecar a Π con la recta perpendicular que pasa por P.



Si $\Pi : ax + by + cz = d$, llamando $\mathbf{N} = (a, b, c)$ (vector normal a Π), se tiene que

$$proy_{\Pi}(P) = \frac{d - P \cdot \mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|^2}\,\mathbf{N} + P.$$

Si P es un punto y $\mathbb{L}$ una recta en $\mathbb{R}^3$, la proyección de P sobre $\mathbb{L}$ es la intersección de la recta con el plano perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por P. Si $\mathbb{L} : X = \lambda.\mathbf{v} + Q \ \ (\lambda \in \mathbb{R})$, entonces

$$proy_{\mathbb{L}}(P) = \frac{(P - Q) \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\,\mathbf{v} + Q.$$

Dado un vector $\mathbf{v}$ (en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$), notaremos $proy_{\mathbf{v}}(P)$ a la proyección ortogonal de P sobre la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.\mathbf{v} \ \ (\lambda \in \mathbb{R})$. Se tiene que $proy_{\mathbf{v}}(P) = \dfrac{P \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\,\mathbf{v}$.

La *distancia entre un punto P y una recta $\mathbb{L}$ o un plano Π* es la mínima de todas las distancias entre P y los puntos de la recta o del plano. Geométricamente, se observa que el punto de la recta o del plano que está a distancia mínima de un punto P es la proyección ortogonal de P; en símbolos, $d(P, \mathbb{L}) = \|P - proy_{\mathbb{L}}(P)\|$ y $d(P, \Pi) = \|P - proy_{\Pi}(P)\|$.

A partir de las fórmulas para proyección ortogonal se deducen fórmulas para calcular la distancia entre un punto y una recta o entre un punto y un plano. Si $P \in \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{L} : ax + by = c$, entonces

$$d(P, \mathbb{L}) = \frac{|c - P \cdot (a,b)|}{\|(a,b)\|}$$

y si $P \in \mathbb{R}^3$ y $\Pi : ax + by + cz = d$, llamando $\mathbf{N} = (a,b,c)$, se tiene que

$$d(P, \Pi) = \frac{|d - P \cdot \mathbf{N}|}{\|\mathbf{N}\|}.$$

Simetrías

- *Con respecto a un punto* Q: El simétrico de un punto P con respecto a Q es el único punto en la recta que pasa por P y Q que es distinto de P y cuya distancia a Q es igual a la distancia entre P y Q.
- *Con respecto a una recta* $\mathbb{L}$: El simétrico de un punto P con respecto a una recta $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}^2$ es el único punto (distinto de P) en la recta perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por P cuya distancia a $\mathbb{L}$ es igual a la distancia entre P y $\mathbb{L}$; es decir, es el simétrico de P con respecto a $proy_{\mathbb{L}}(P)$. Similarmente, el simétrico de un punto P con respecto a una recta $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}^3$ es el simétrico de P con respecto a $proy_{\mathbb{L}}(P)$.
- *Con respecto a un plano* Π: El simétrico de un punto P con respecto a un plano Π en $\mathbb{R}^3$ es el único punto (distinto de P) en la recta perpendicular a Π que pasa por P cuya distancia a Π es igual a la distancia entre P y Π; es decir, es el simétrico de P con respecto a $proy_{\Pi}(P)$.

Práctica 6

Matrices y sistemas lineales

Definiciones y propiedades

Matrices

Dados los números naturales m y n, una *matriz* de m filas y n columnas con coeficientes reales es un arreglo rectangular $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Llamamos *filas* de A a las n-uplas $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ con $i = 1, \dots, m$.
Llamamos *columnas* de A a las m-uplas $A^{(j)} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ con $j = 1, \dots, n$.

Con esta notación, $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$ y también $A = (A^{(1)}\ A^{(2)}\ \dots\ A^{(n)})$.

Al número que está en la fila i y la columna j de la matriz A lo llamamos *elemento* ij de A y lo notamos a_{ij}. Escribimos abreviadamente $A = (a_{ij})$.
Notamos $\mathbb{R}^{m\times n}$ al conjunto de las matrices de m filas y n columnas con coeficientes reales.
Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, la *matriz transpuesta* de A es la matriz $A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$ que tiene como filas a las columnas A.
Una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es *triangular superior (inferior)* si $a_{ij} = 0$ para $i > j$ ($i < j$, respectivamente) y es *diagonal* si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

En el conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$, están definidas la *suma* y el *producto por escalares* de la siguiente manera:
Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n} \qquad\qquad kA = (ka_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Es decir, suma y producto por escalares se calculan elemento a elemento.
Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times s}$, se define el *producto* de A por B como

$$AB = C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times s}$$

donde c_{ij} es igual al producto escalar de la fila i de A por la columna j de B

$$c_{ij} = (\text{fila } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B)$$

Es posible calcular AB si y solo si la cantidad de columnas de A coincide con la cantidad de filas de B.

Propiedades del producto de matrices.

- Es asociativo: $(AB)C = A(BC)$
- Es distributivo con respecto a la suma: $\begin{aligned} A(B+C) &= AB+AC \\ (A+B)C &= AC+BC \end{aligned}$
- La matriz *identidad* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ verifica $AI = IA$ para toda matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. La matriz I es el elemento neutro para el producto en $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Sistemas lineales

Un *sistema lineal* de m ecuaciones con n incógnitas es un conjunto de m ecuaciones en las variables $x_1, \dots, x_n$ del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde las a_{ij} y las b_i representan constantes.

Cuando $b_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$, se dice que el sistema es *homogéneo*.

Una n-upla $(s_1, \dots, s_n)$ es una solución del sistema si y solo si al reemplazar x_j por s_j para cada $j = 1, \dots, n$, se satisfacen cada una de las m ecuaciones.

Un sistema se dice *incompatible* si no tiene ninguna solución y *compatible* si tiene alguna solución.

Un sistema lineal homogéneo siempre es compatible: $0 \in \mathbb{R}^n$ es una solución, que llamaremos la *solución trivial*.

Si un sistema compatible tiene una única solución es *determinado* y si tiene infinitas soluciones es *indeterminado*.

La *matriz de coeficientes* del sistema es $A = (a_{ij})$ y la *matriz ampliada* o *matriz aumentada* del sistema es $(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

Decimos que dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen el mismo conjunto de soluciones.

Propiedad. Las siguientes operaciones sobre las ecuaciones de un sistema dan lugar a un sistema equivalente al dado:

1. Multiplicar una de las ecuaciones por una constante no nula.

2. Intercambiar dos de las ecuaciones.

3. Sumar un múltiplo de una de las ecuaciones a otra ecuación.

Las operaciones anteriores sobre las ecuaciones se corresponden con las siguientes operaciones sobre las filas de la matriz aumentada del sistema. Se denominan *operaciones elementales sobre las filas*:

1. Multiplicar una de las filas por una constante no nula.

2. Intercambiar dos de las filas.

3. Sumar un múltiplo de una de las filas a otra fila.

Se dice que una matriz se encuentra en la forma *escalonada en las filas reducida* si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Si una fila no consta únicamente de ceros, entonces su primer coeficiente no nulo es un 1 (a este 1 se lo denomina 1 principal).

2. Si existen filas que constan sólo de ceros (filas nulas), se agrupan en la parte inferior de la matriz.

3. Si dos filas sucesivas son no nulas, el 1 principal de la fila inferior se presenta más a la derecha que el 1 principal de la fila superior.

4. Cada columna que contenga un 1 principal tiene ceros en todas las demás posiciones.

Si una matriz tiene solo las propiedades 1., 2. y 3. se dice que está en la forma *escalonada en las filas*.

Diremos que dos matrices son equivalentes por filas si puede obtenerse una de la otra por medio de una sucesión finita de operaciones elementales sobre las filas.
El *método de eliminación de Gauss* para resolver sistemas lineales consiste en llevar la matriz aumentada del sistema planteado, vía la aplicación sistemática de operaciones elementales sobre sus filas, a la forma escalonada en las filas reducida. La resolución del sistema resultante, que es equivalente al original, es inmediata.
Llamamos *rango fila* (o *rango*) de la matriz A al número de filas no nulas que tiene la matriz escalonada en las filas reducida equivalente a A.

Teorema de Rouché-Frobenius. El sistema de matriz ampliada $(A|\mathbf{b})$ es compatible si y solo si el rango de $(A|\mathbf{b})$ es igual al rango de A.

Notación. El sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

puede escribirse $AX = B$, con

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}.$$

En adelante, identificaremos $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ con $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ con $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. Así, el sistema se escribirá

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Propiedades. Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ $(\mathbf{b} \neq 0)$,

$$\mathbb{S}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\mathbf{x} = 0\} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{S}_{\mathbf{b}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

a) Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces $k\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$.

   Esto dice que la suma de dos soluciones de un sistema homogéneo es también solución del mismo y que los múltiplos de una solución son también soluciones.

b) Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{S}_{\mathbf{b}}$, entonces $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$.

   Esto es, la diferencia entre dos soluciones de un sistema no homogéneo es solución del sistema homogéneo asociado.

c) Si $\mathbf{s}$ es una solución particular del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (es decir, $\mathbf{s} \in \mathbb{S}_{\mathbf{b}}$), entonces

$$\mathbb{S}_{\mathbf{b}} = \mathbb{S}_0 + \mathbf{s} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{s}, \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbb{S}_0\}.$$

Esto significa que cualquier solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede obtenerse sumando una solución particular del sistema con una solución del sistema homogéneo asociado.

Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es *inversible* si existe $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $AB = BA = I$. Cuando B existe, es única. Se llama la *matriz inversa de* A y la notamos $B = A^{-1}$.
Propiedad. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son inversibles, entonces AC es inversible y vale $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$.
Propiedad. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) A es inversible.

b) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única, cualquiera sea $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

c) $A\mathbf{x} = 0$ tiene únicamente la solución trivial.

d) A es equivalente por filas a $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Combinación lineal e independencia lineal. Subespacios

Diremos que un conjunto $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un *subespacio* si verifica simultáneamente:

- El vector 0 pertenece a $\mathbb{S}$.
- Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son elementos de $\mathbb{S}$, entonces la suma $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ pertenece a $\mathbb{S}$.
- Si $\mathbf{u}$ es un elemento de $\mathbb{S}$ y c es un número real, entonces el producto $c\mathbf{u}$ pertenece a $\mathbb{S}$.

Por ejemplo, $\{0\}$ y $\mathbb{R}^n$ son subespacios y, si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, entonces $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\mathbf{x} = 0\}$ es un subespacio.
Dados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ en $\mathbb{R}^n$, un vector $\mathbf{w}$ es una *combinación lineal* de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ si $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_s\mathbf{v}_s$ con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ números reales. El conjunto $\mathbb{S}$ de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ es un subespacio, que notaremos $\mathbb{S} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s \rangle$, y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s\}$ es un *sistema o conjunto de generadores de* $\mathbb{S}$.
Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s \in \mathbb{R}^n$ son *linealmente dependientes* si existen números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, no todos iguales a 0, tales que $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_s\mathbf{v}_s = 0$. En caso contrario, se dice que

son *linealmente independientes*, es decir, si la **única** forma de escribir al 0 como combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ es con todos los coeficientes iguales a 0.
Si $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S} \neq \{0\}$, cualquier conjunto de generadores de $\mathbb{S}$ que sea linealmente independiente se llama una *base* de $\mathbb{S}$. Todas las bases de $\mathbb{S}$ tienen la misma cantidad de elementos. Esta cantidad es la *dimensión* de $\mathbb{S}$ y la notaremos $\dim(\mathbb{S})$. Se define también $\dim(\{0\}) = 0$.

Práctica 7

Determinantes

Definiciones y propiedades

El *determinante* de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es un número real que se calcula a partir de los elementos de A. Se nota $\det(A)$ ó $|A|$.

Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, el determinante de A es el número

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Los determinantes de matrices de 4×4 se calculan utilizando determinantes de matrices de 3×3, y, en general, los determinantes de matrices de $n\times n$ se calculan utilizando determinantes de matrices de $(n-1)\times(n-1)$.

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$, el *menor del elemento* a_{ij}, que se nota M_{ij}, se define como el determinante de la submatriz que queda al eliminar de A la i-ésima fila y la j-ésima columna. El número $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ se conoce como *cofactor del elemento* a_{ij}.

Se define el determinante de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ como

$$\det(A) = |A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}.$$

Propiedad. Se puede obtener $\det(A)$ multiplicando los elementos de cualquier fila (o columna) por sus respectivos cofactores y sumando los productos que resulten. Es decir, para cada $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

(desarrollo por cofactores a lo largo de la j-ésima columna) y

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

(desarrollo por cofactores a lo largo de la i-ésima fila).

Propiedades.

- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ contiene una fila de ceros, entonces $\det(A) = 0$.
- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular, entonces $\det(A)$ es el producto de los elementos de la diagonal, es decir $\det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.
- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y A^t es la matriz transpuesta de A, entonces $\det(A^t) = \det(A)$.

Propiedades. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Si A' es la matriz que se obtiene cuando una sola fila de A se multiplica por una constante k, entonces $\det(A') = k\det(A)$.
- Si A' es la matriz que se obtiene al intercambiar dos filas de A, entonces $\det(A') = -\det(A)$.
- Si A' es la matriz que se obtiene al sumar un múltiplo de una de las filas de A a otra fila, entonces $\det(A') = \det(A)$.

Propiedades.

- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \det(kA) &= k^n\det(A) \\ \det(AB) &= \det(A)\det(B) \end{aligned}$$

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible si, y solo si, $\det(A) \neq 0$. En el caso de que A sea inversible vale $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Interpretación geométrica del determinante

Si $O = (0,0)$, $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$ son tres puntos en $\mathbb{R}^2$, el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ es

$$\left|\det\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}\right|.$$

Dados en $\mathbb{R}^3$ los puntos $O = (0,0,0)$, $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y $R = (r_1, r_2, r_3)$, el volumen del paralelepípedo determinado por $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$ es

$$\left|\det\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}\right| = |(\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OR}|$$

Práctica 8

Introducción a las transformaciones lineales

Definiciones y propiedades

Transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Una *transformación lineal* $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función que satisface las dos propiedades siguientes:

TL1. Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$.

TL2. Si $k \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $T(k\mathbf{v}) = k\,T(\mathbf{v})$.

Son transformaciones lineales:

- La función nula $0\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dada por $0(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.
- La función identidad $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dada por $\mathrm{id}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Propiedades. Cualquier transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ satisface:

a) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

b) $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

c) $T(\mathbf{v}-\mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w})$ para $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

d) $T(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_r\mathbf{v}_r) = a_1T(\mathbf{v}_1) + a_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + a_rT(\mathbf{v}_r)$ para $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathbb{R}^n$.

Dada una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, existe una única matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que T puede escribirse en la forma

$$T(x_1,\ldots,x_n) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{ó} \quad T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

La representación $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ se llama la *expresión matricial canónica de* T y a la matriz A se la denomina la *matriz de la transformación lineal* T. Escribiremos A_T para representar esta matriz.

Teorema. Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ son vectores (no necesariamente distintos) en $\mathbb{R}^m$, entonces hay una única transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, \ldots, T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$.

Geometría y transformaciones lineales en el plano

Algunas transformaciones lineales $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pueden interpretarse geométricamente.

- *Rotación* de ángulo θ en el sentido contrario al de las agujas del reloj:
  $A_T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
- *Homotecia* de factor $k \in \mathbb{R}_{>0}$: $T(\mathbf{x}) = k\,\mathbf{x}$. Puede ser una *dilatación* (si $k > 1$) o una *contracción* (si $k < 1$). En este caso, $A_T = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.
- *Deslizamiento cortante en la dirección* x con factor k: $A_T = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- *Deslizamiento cortante en la dirección* y con factor k: $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

Imagen y preimagen de un conjunto por una transformación lineal

Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ y $M \subset \mathbb{R}^m$, notamos:

$$\begin{aligned} T(\mathbb{S}) &= \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m / \ \mathbf{w} = T(\mathbf{s}) \text{ con } \mathbf{s} \in \mathbb{S}\} \ \text{(imagen de } \mathbb{S} \text{ por } T) \\ T^{-1}(\mathbf{w}) &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n / \ T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} \ \text{(preimagen o imagen inversa de } \mathbf{w} \text{ por } T) \\ T^{-1}(M) &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n / \ T(\mathbf{v}) \in M\} \ \text{(preimagen o imagen inversa de } M \text{ por } T) \end{aligned}$$

Propiedades. Si $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces $T(\mathbb{S})$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.
Si $\mathbb{T}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$, entonces $T^{-1}(\mathbb{T})$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, llamamos:

- *núcleo* de T al conjunto $\operatorname{Nu}(T) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n / \ T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$,
- *imagen* de T al conjunto $\operatorname{Im}(T) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m / \ \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \text{ con } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}$.

Observamos que $\operatorname{Nu}(T) = T^{-1}(\mathbf{0})$, $\operatorname{Im}(T) = T(\mathbb{R}^n)$.

Propiedades. Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces:

a) $\operatorname{Nu}(T)$, $\operatorname{Im}(T)$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente.

b) Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^n$, $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \dots, T(\mathbf{v}_r)\}$ es un conjunto de generadores de $\operatorname{Im}(T)$.

c) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A_T)$.

Teorema de la dimensión. Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces

$$\dim(\mathrm{Nu}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = n.$$

Clasificación, composición e inversa

Decimos que una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es:

- *monomorfismo* si es inyectiva, esto es, si verifica "$T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w}) \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}$".
- *epimorfismo* si es suryectiva, esto es, si $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^m$.
- *isomorfismo* si es biyectiva, es decir, si es monomorfismo y epimorfismo.

Propiedades. Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces:

a) T es monomorfismo si y sólo si $\mathrm{Nu}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

b) Si T es monomorfismo y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ es linealmente independiente, entonces $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \dots, T(\mathbf{v}_r)\}$ es linealmente independiente.

Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal, entonces T es isomorfismo si y sólo si "Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, entonces $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$".

Dadas dos transformaciones lineales, $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $S\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, la composición

$$S \circ T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \text{ definida por } (S \circ T)(\mathbf{v}) = S(T(\mathbf{v})),$$

es una transformación lineal. La matriz de la composición $S \circ T$ es $A_{S\circ T} = A_S A_T$.

Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es isomorfismo, la función inversa

$$T^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \text{ que cumple } T \circ T^{-1} = \mathrm{id} \text{ y } T^{-1} \circ T = \mathrm{id},$$

es isomorfismo. La matriz de la inversa de T es $A_{T^{-1}} = (A_T)^{-1}$.

Propiedad. Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son isomorfismos, entonces $S \circ T$ es isomorfismo y se verifica $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.

Una transformación lineal $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un *proyector* si $p \circ p = p$.
Si $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un proyector, entonces para todo $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(p)$, vale $p(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

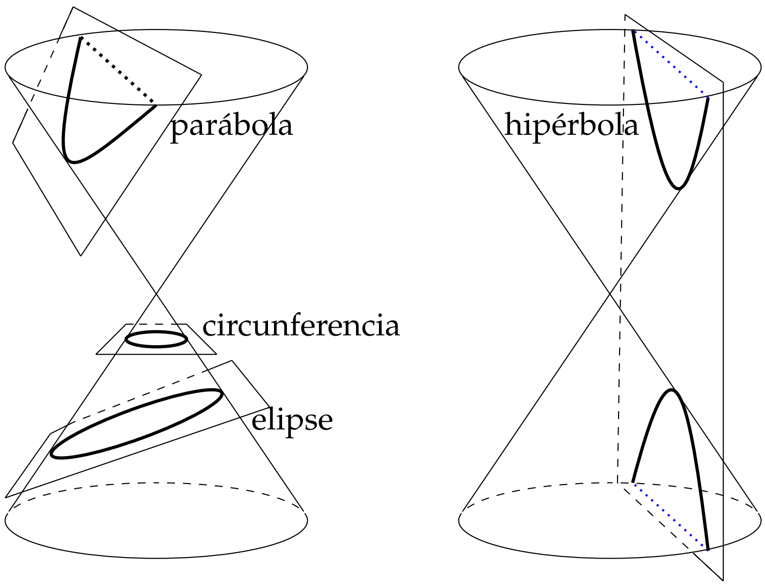
Son ejemplos de proyectores la proyección ortogonal sobre una recta en $\mathbb{R}^2$, o sobre un plano o una recta en $\mathbb{R}^3$.

Práctica 9

Cónicas

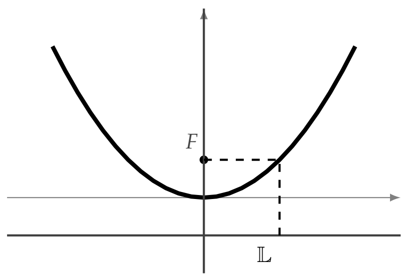
Definiciones y propiedades

Las *cónicas* son curvas planas que se obtienen intersecando un cono con un plano.



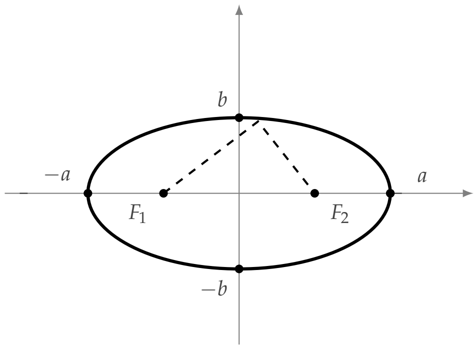
En todos los casos, pueden definirse a partir de fórmulas que involucran relaciones de distancia. Existen puntos fijos (llamados *focos*) y rectas fijas (llamadas *directrices*) tales que los puntos P de la cónica cumplen que el cociente entre la distancia de P al foco y la distancia de P a la directriz es una constante e llamada *excentricidad*.
Una *parábola* es el conjunto de todos los puntos P del plano que equidistan de un punto fijo F, el foco, y de una recta $\mathbb{L}$ que no pasa por F, la directriz.

El siguiente gráfico representa a la parábola que tiene foco $F = (0, c)$ y directriz $\mathbb{L} : y = -c$ $(c > 0)$. La ecuación es $x^2 - 4cy = 0$ (la forma canónica de la ecuación de la parábola).

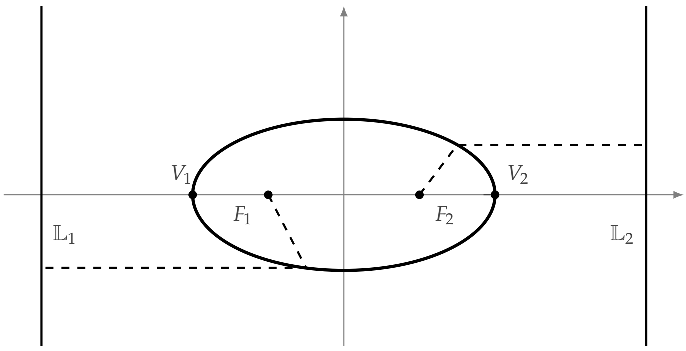


El *eje* de la parábola es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco. El *vértice* es el punto de intersección del eje con la parábola (es el punto medio entre el foco y su proyección ortogonal sobre la directriz). En la parábola del gráfico, el eje es el eje y y el vértice el $(0,0)$.
En el caso de una parábola, la relación de distancias es $\dfrac{d(P,F)}{d(P,\mathbb{L})} = 1 = e$.
La parábola es simétrica respecto de su eje.

Una *elipse* es el conjunto de todos los puntos P del plano que cumplen que la suma de las distancias de P a dos puntos F_1 y F_2, los focos, es constante $2a$, con $2a > d(F_1, F_2)$.
El siguiente gráfico representa a la elipse que tiene focos $F_1 = (-c,0)$ y $F_2 = (c,0)$ $(0 < c < a)$. La ecuación es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, con $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (la forma canónica de la ecuación de la elipse).

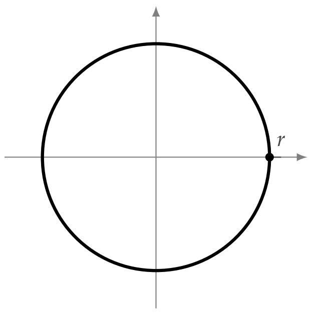


Los *vértices* de la elipse son los puntos V_1 y V_2 de intersección de la elipse con la recta que pasa por los focos. El *centro* es el punto medio entre los focos (o entre los vértices). El *eje mayor* es el segmento que une los vértices y el *eje menor* es el segmento perpendicular al eje mayor que pasa por el centro y une dos puntos de la elipse. Los *semiejes mayores* son cada uno de los segmentos que unen el centro de la elipse con los vértices y los *semiejes menores* son cada uno de los segmentos incluidos en el eje menor que unen el centro con los puntos de la elipse. En la elipse del gráfico los vértices son $V_1 = (-a,0)$ y $V_2 = (a,0)$, el centro el $(0,0)$, el eje mayor está incluido en el eje x y el eje menor en el eje y.
Si c es la distancia del centro de la elipse a uno de sus focos y a es la distancia del centro a uno de sus vértices, la excentricidad de la elipse es $e = \dfrac{c}{a}$ $(0 < e < 1)$.
Cada foco F_i $(i = 1,2)$ de la elipse tiene asociada una recta directriz $\mathbb{L}_i$ paralela al eje menor.
Cada punto P de la elipse verifica $e = \dfrac{d(P,F_i)}{d(P,\mathbb{L}_i)}$, con $i = 1,2$. En el gráfico, las directrices son $\mathbb{L}_1 : x = \dfrac{-a^2}{c}$ y $\mathbb{L}_2 : x = \dfrac{a^2}{c}$.



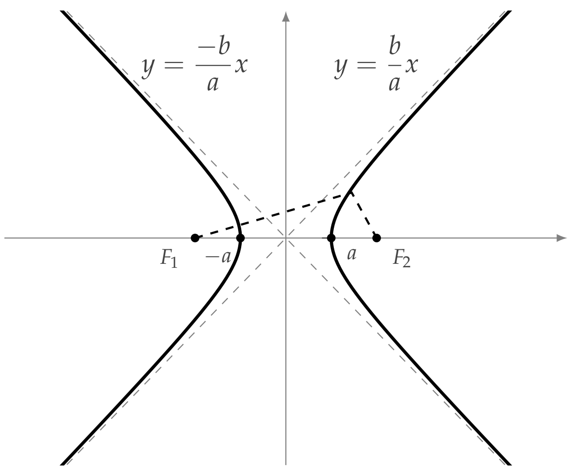
La elipse es simétrica respecto de su eje mayor y de su eje menor.

Una *circunferencia* es el conjunto de puntos P del plano que están a una distancia fija r de un punto dado C (el centro). Una circunferencia es un caso especial de elipse en el que los dos focos coinciden.
El siguiente gráfico representa una circunferencia con centro $C = (0, 0)$ y radio r.

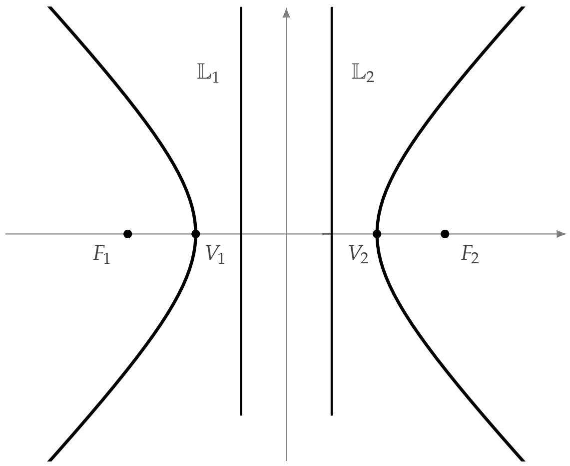


$x^2 + y^2 = r^2$, con $r > 0$.

Una *hipérbola* es el conjunto de puntos P del plano que cumplen que el valor absoluto de la diferencia de las distancias de P a dos puntos fijos F_1 y F_2, los focos, es constante $2a$, siendo $2a < d(F_1, F_2)$.
El siguiente gráfico representa la hipérbola con focos $F_1 = (0, -c)$ y $F_2 = (0, c)$ $(c > a)$. La ecuación de esta hipérbola es $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, con $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (la forma canónica de la hipérbola).



En este gráfico, las rectas de ecuación $y = \frac{-b}{a}x$ e $y = \frac{b}{a}x$ son las *asíntotas* de la hipérbola.
Los *vértices* de una hipérbola son los puntos de intersección de la hipérbola con la recta que pasa por los focos. El *centro* es el punto medio entre los focos (o entre los vértices) y el *eje transversal o real*, el segmento que une los vértices. En el gráfico, los vértices son $V_1 = (-a, 0)$ y $V_2 = (a, 0)$, el centro es $(0, 0)$ y el eje transversal está incluido en el eje x.
Si c es la distancia del centro de la hipérbola a uno de sus focos y a es la distancia del centro al vértice correspondiente, la excentricidad de la hipérbola es $e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$.
Las directrices de la hipérbola son las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ que son perpendiculares al eje transversal y tales que cada punto P de la hipérbola verifica $e = \frac{d(P, F_i)}{d(P, \mathbb{L}_i)}$, con $i = 1, 2$. Si la hipérbola está dada por su ecuación canónica, las directrices son $\mathbb{L}_1 : x = \frac{-a^2}{c}$ y $\mathbb{L}_2 : x = \frac{a^2}{c}$,



La hipérbola es simétrica respecto de la recta que contiene a su eje transversal y respecto de la recta perpendicular a su eje transversal que pasa por el centro (el eje no transversal o imaginario).

Reducción a la forma canónica

La forma más general de la ecuación de segundo grado en las variables x e y es

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \lambda x + \mu y + \nu = 0.$$

Para estudiar si representa una parábola, una elipse, una circunferencia o una hipérbola se aplican traslaciones o rotaciones convenientes de manera de transformar esta ecuación en otra que esté dada en forma canónica.
Si la ecuación es de la forma $\alpha x^2 + \gamma y^2 + \lambda x + \mu y + \nu = 0$ $(\beta = 0)$, para eliminar los términos lineales, planteamos la traslación $(x, y) = (\overline{x} + h, \overline{y} + k)$. Si $\alpha \neq 0$, $h = \frac{-\lambda}{2\alpha}$, y si $\gamma \neq 0$,

$k = \dfrac{-\mu}{2\gamma}$. En el caso general de la ecuación de segundo grado, si $\beta \neq 0$, el ángulo θ que se deben rotar los ejes para eliminar el término en xy viene dado por $\operatorname{tg}(2\theta) = \dfrac{\beta}{\alpha - \gamma}$, si $\alpha \neq \gamma$, o $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, si $\alpha = \gamma$. Se plantea entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}$$

Luego de estas transformaciones se obtiene la forma canónica de la ecuación, es decir, una ecuación sin término xy, y con término lineal de una variable no nulo solo si el coeficiente del cuadrado de esa variable es cero.

En lo que sigue, llamaremos lugar geométrico al conjunto de puntos del plano que cumple con ciertas propiedades determinadas. Por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos que están a distancia 1 del origen es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.