Ejercicio 1. Determinar si la función T es una transformación lineal.

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1, x_2) = (x_1 + 3, -x_2)$.

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1)$.

c) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\ T(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0, 0)$.

d) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2, x_3, 2x_2)$.

e) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 - 3x_2 + x_3 - 2x_4, 3x_1 - 4x_2 - x_3^2 + x_4)$

f) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5,\ T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, -2x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

Soluciones a) NO b) Si c) Si d) Si e) NO f) Si

Ejercicio 2. En cada caso, hallar la expresión funcional de $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$

c) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

f) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soluciones:

a) T(x,y) = (x+2y , -x) b) T(x,y) = (2x+3y , -4x-6y) c) T(x,y) = (x,y)

d) T(x,y,z) = (3x-y , 2x+y+z , 5x+2z) e) T (x,y,z) = (x+2y-z , x+z , 2x+2y)

f) $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 , x_2 , x_3)$ g) $T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-x_1+2x_2+x_4 , x_3 - x_4 , 2x_1 +x_2)$

Ejercicio 3. En cada caso, hallar la expresión matricial canónica de T.

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, 2x_2 + x_3)$.

c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$.

d) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$

e) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_2, x_1 - x_3)$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4. Decidir si existe una transformación lineal T que satisface:

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(1,-1) = (3,0),\ T(2,-2) = (0,-2)$

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(1,-2,0) = (3,4),\ T(2,0,1) = (-1,1),\ T(0,4,1) = (-7,-7)$

c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(1,1,1) = (2,3,4),\ T(0,1,1) = (1,2,1),\ T(1,2,2) = (1,1,5)$

d) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(1,1) = (2,1,1),\ T(1,0) = (0,2,0),\ T(5,2) = (4,8,2)$

Respuesta: a) No b) Si, existen infinitas c) No d) Si

Ejercicio 5. Hallar las expresiones funcional y matricial de la transformación lineal T.

a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0,0) = (2,1,-1),\ T(0,1,0) = (3,-1,1)$ y $T(0,0,1) = (0,0,4)$.

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(2,0,0) = (4,2,2),\ T(0,4,0) = (1,1,1)$ y $T(0,0,3) = (0,0,-1)$.

c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1,-1) = (0,3,1),\ T(1,0,1) = (2,-1,1)$ y $T(1,1,0) = (3,2,4)$.

d) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,-1) = (2,1)$ y $T(1,1) = (0,1)$.

Respuestas: a) T(x,y,z) =(2x+3y,x-y,-x+y+4z) b) T(x,y,z) =(2x+ ¼ y , x + ¼ y , x+ ¼ y-$^1/_3$ z)

Respuestas: c) T(x,y,z) =(-x+4y+3z,2y-z,-2x+6y+3z) b) T(x,y,z) =(x-y , x)

Ejercicio 6. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, verifica $T(1,1) = (-3,2)$.

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} \mathbf{x}$, verifica $T(1,2,1) = (-1,5,-6)$.

Respuestas: a) k=-4 b) k=-7

Ejercicio 7. Hallar la expresión matricial de la simetría en $\mathbb{R}^2$ respecto a

a) el eje x *b)* el eje y *c)* la recta $y = x$ *d)* la recta $y = -x$

Respuestas: a) T(x;y) = (x;-y) b) T(x;y) = (-x;y) c) T(x;y) = (y;x) d) T(x,y) = (-y;-x)

Ejercicio 8. Hallar la expresión matricial de la simetría en $\mathbb{R}^3$ respecto al

a) plano xy *b)* plano xz *c)* plano yz

Respuestas: a) T(x,y,z) =(x,y,-z) b) T(x,y,z) =(x,-y,z)

c) T(x,y,z) =(-x,y,z)

Ejercicio 9. Hallar la expresión matricial de la proyección ortogonal en $\mathbb{R}^2$ sobre

a) el eje x *b)* el eje y

Respuestas: a) T(x,y) =(x,0) b) T(x,y) =(0,y)

Ejercicio 10. Hallar la expresión matricial de la proyección ortogonal en $\mathbb{R}^3$ sobre

a) el plano xy *b)* el plano xz *c)* el plano yz

Respuestas: a) T(x,y,z) =(x,y,0) b) T(x,y,z) =(x,0,z) c) T(x,y,z) =(0,y,z)

Ejercicio 11. Hallar la imagen del vector $(3,-4)$ cuando se lo hace girar, en el sentido contrario al de las agujas del reloj, con un ángulo de:

a) $\dfrac{\pi}{6}$ *b)* $\dfrac{\pi}{4}$ *c)* $\dfrac{\pi}{2}$ *d)* π

En cada caso, dar la expresión matricial de la rotación correspondiente al ángulo dado.

Respuestas:

a) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{2}\;;\;\; \frac{3}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2}\;;\;\; \frac{\sqrt{2}.3}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $(4 \;\;,\;\; 3)$

d) $(-3 \;\;,\;\; 4)$

Ejercicio 12. Hallar la expresión matricial de la rotación de ángulo

a) $\frac{\pi}{6}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj con respecto al eje x.

b) $\frac{\pi}{4}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj con respecto al eje y.

c) $\frac{\pi}{2}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj con respecto al eje z.

Respuestas:

a) $T(x,y,z) = (x, \cos(\theta) . y - \text{sen}(\theta) . z, \text{sen}(\theta) . y + \cos(\theta) . z)$ con $\theta = \pi/6$

b) $T(x,y,z) = (\cos(\theta) . x + \text{sen}(\theta) . z, y, -\text{sen}(\theta) . x + \cos(\theta) . z)$ con $\theta = \pi/4$

c) $T(x,y,z) = (\cos(\theta) . x - \text{sen}(\theta) . y, \text{sen}(\theta) . x + \cos(\theta) . y, z)$ con $\theta = \pi/2$

Ejercicio 13. Hallar la expresión matricial de la transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ que produce un deslizamiento cortante con un factor de

a) $k = 4$ en la dirección y.

b) $k = -2$ en la dirección x.

Respuesta: Ver Video

Ejercicio 14. Hallar la expresión matricial de la transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ que produce

a) una dilatación de factor $k = 2$.

b) una contracción de factor $k = \frac{1}{2}$.

c) una dilatación de factor $k = 2$ en la dirección x.

d) una contracción de factor $k = \frac{1}{2}$ en la dirección y.

Respuesta: a) $T(x,y) = (2x,2y)$ b) $T(x,y) = (x/2,y/2)$ c) $T(x,y) = (2x,y)$ d) $T(x,y) = (xy/2)$

Ejercicio 15. Hallar la imagen del cuadrado unitario de $\mathbb{R}^2$, es decir el cuadrado con vértices en $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$, por las transformaciones lineales de los ejercicios 7, 9, 11, 13 y 14.

Respuesta: ver videos