Álgebra CBC A-62 para Ingenieria (soluciones de ejercicios de las prácticas)

Práctica 7

Ejercicio 1. Calcular los siguientes determinantes

a) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}$

Soluciones a) -7 b) 0

Ejercicio 2. Calcular los siguientes determinantes, desarrollando por cofactores por las filas y columnas indicadas:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ por tercera fila; por primera columna.

b) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ por primera fila; por segunda fila; por cuarta columna; por tercera columna.

Soluciones: a) -48 b) 864

Ejercicio 3. Calcular los siguientes determinantes, desarrollando por cofactores por la fila o columna más conveniente.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

Respuesta: a) -84 b) -3

Ejercicio 4. Calcular los determinantes de las siguientes matrices usando propiedades.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Respuesta: a) 0 b) 10 y c) 120

Ejercicio 5. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Calcular $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(A^t)$, $\det(AB)$, $\det(A+B)$, $\det(A^{10})$ y $\det(A^5B - A^5)$.

Respuestas: det(A) = 8, det(B)=-2, det(A+B)= -1, det (A^t)=8, det(A^5B-A^5)= 0, det(A^{10})=8^{10}

Ejercicio 6.

a) Determinar todos valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz A no es inversible.

- $A = \begin{pmatrix} 2 & k+4 \\ k-2 & -4 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 2k \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & k^2-1 & 2 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ k^2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Respuestas: a) k=0 y K=-2 b) Para Todo k c) k ε {0,1,-1,2} d) k=0 o k=3

Ejercicio 6.

b) Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz A es inversible.

- $A = \begin{pmatrix} k+1 & 2 \\ 2 & k-2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & k & k+1 \end{pmatrix}$

Respuestas: a) k≠3 y k≠-2 b) k≠5 c) Para todo k ε R

Ejercicio 7. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$. Encontrar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$ admite solución no trivial.

Respuestas: a= 1/3

Ejercicio 8. Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $\det(A) = 15$, calcular

a) $\det(2A)$ *b)* $\det((3A)^{-1})$ *c)* $\det(3A^{-1})$

Respuestas: a) 120 b) 1/405 c) 27/15

Ejercicio 9. En cada caso, calcular el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$.

a) $O = (0,0)$, $P = (1,-2)$, $Q = (3,2)$.

b) $O = (0,0)$, $P = 2(1,-2)$, $Q = 2(3,2)$.

Respuestas: a) Area = 8 b) Area = 32

Ejercicio 10. Sean $\mathbf{u} = (1,1,2)$, $\mathbf{v} = (4,2,1)$ y $\mathbf{w} = (3,1,1)$.

a) Calcular el volumen del paralelepípedo determinado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular $\det(A)$ y el volumen del paralelepípedo determinado por $A\mathbf{u}$, $A\mathbf{v}$ y $A\mathbf{w}$. ¿Qué se puede concluir?

Respuestas: a) Volumen = 4 b) Volumen=8

Ejercicios surtidos

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(AB) = 2$. Calcular $\det(B^{-1})$.

Respuestas: $\det(B^{-1})=-8$

Ejercicios surtidos

2. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(B) = -3$.

Hallar todas las soluciones del sistema $(BA)\mathbf{x} = -B\mathbf{x}$.

Respuesta: (0,0,0) es solución única

Ejercicios surtidos

3. Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Decidir para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el sistema $(A^2 + 2A)\mathbf{x} = 0$ tiene solución no trivial.

Respuesta: a ε {0,1,2,-5/3}

Ejercicios surtidos

4. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $\det(BA^{-1}) = \det\left(\frac{1}{4}BA\right)$.

Respuesta: k ε {1/4,8,0}